

① چهار کتاب ادبی و سه کتاب ریاضی را به چند طریق می‌توان در یک قفسه چید به شرطی که کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند؟

(۴) ۷۲۰

(۳) ۵۷۶

(۲) ۳۶۰

(۱) ۱۲۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

برای آن که کتاب‌های ریاضی کنار هم باشند، آن‌ها را یک بسته در نظر می‌گیریم. در این صورت ۵ شیء (۱ بسته و ۴ کتاب ادبی) داریم که به $۱۲۰ = ۵!$ طریق می‌توانند جابه‌جا شوند. از طرفی کتاب‌های ریاضی داخل بسته هم $۳! = ۶$ جایگشت مختلف دارند. پس در کل $۱۲۰ \times ۶ = ۷۲۰$ حالت مختلف داریم.

② حروف کلمه «جهانگردی» را در حالت‌های مختلف کنار هم می‌چینیم. چه تعداد از کلمه‌های ساخته شده با حرف «ج» آغاز و به حرف «ی» ختم می‌شوند؟

(۴) $\frac{۸!}{۴}$ (۳) $\frac{۸!}{۲}$ (۲) $\frac{۸!}{۶!}$

(۱) ۶!

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۱»

از آنجا که کلمه ساخته شده با «ج» آغاز و به «ی» ختم می‌شود، برای جایگاه‌های ۱ و ۸، تنها یک حالت امکان‌پذیر است و شش حرف باقی‌مانده در جایگاه‌های ۲ تا ۷ به ۶! حالت می‌توانند جایگشت داشته باشند.

$$\frac{A}{۸} \quad \frac{\quad}{۷} \quad \frac{\quad}{۶} \quad \frac{\quad}{۵} \quad \frac{\quad}{۴} \quad \frac{\quad}{۳} \quad \frac{\quad}{۲} \quad \frac{Z}{۱}$$

③ حاصل $\frac{۳۵!}{۱۵! \times ۲۰!} + \frac{۳۵!}{۱۴! \times ۲۱!}$ با کدام گزینه برابر است؟

$$\frac{۳۶!}{۱۵! \times ۲۱!} \quad (۲)$$

$$\frac{۳۵!}{۱۵! \times ۲۱!} \quad (۴)$$

$$\frac{۳۵!}{۱۴! \times ۲۰!} \quad (۱)$$

$$\frac{۳۶!}{۱۴! \times ۲۰!} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\begin{aligned} \frac{۳۵!}{۱۵! \times ۲۰!} + \frac{۳۵!}{۱۴! \times ۲۱!} &= \frac{۳۵!}{۱۴! \times ۱۵ \times ۲۰!} + \frac{۳۵!}{۱۴! \times ۲۱ \times ۲۰!} \\ &= \frac{۳۵! \times ۲۱ + ۳۵! \times ۱۵}{۱۵ \times ۲۱ \times ۱۴! \times ۲۰!} \\ &= \frac{۳۵!(۲۱+۱۵)}{۱۵ \times ۲۱ \times ۱۴! \times ۲۰!} = \frac{۳۶ \times ۳۵!}{۱۵! \times ۲۱!} = \frac{۳۶!}{۱۵! \times ۲۱!} \end{aligned}$$

۴ کتاب ریاضی، ۳ کتاب فیزیک و ۵ کتاب زیست را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به‌طوری که هیچ دو کتاب فیزیکی کنار هم قرار نگیرند؟

(۴) $5! \times 3! \times 4!$

(۳) $10! \times 72$

(۲) $12!$

(۱) $10! \times 12$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

۴ کتاب ریاضی را m_1, m_2, m_3, m_4 ، ۵ کتاب زیست را B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 و سه کتاب فیزیک را P_1, P_2, P_3 در نظر می‌گیریم.

ابتدا کتاب‌های ریاضی و زیست را به ۹! حالت کنار هم قرار می‌دهیم

$$\bigcirc m_1 \bigcirc m_2 \bigcirc m_3 \bigcirc m_4 \bigcirc B_1 \bigcirc B_2 \bigcirc B_3 \bigcirc B_4 \bigcirc B_5 \bigcirc$$

در ده مکان ایجاد شده (که با دایره نشان داده شده‌اند) باید سه کتاب فیزیک را قرار دهیم:

$$10 \times 9 \times 8$$

پس جواب مسئله برابر است با:

$$9! \times 10 \times 9 \times 8 = 10! \times 72$$

۵ در یک جلسه قرار است شش نفر یکی پس از دیگری سخنرانی کنند و لزوماً باید شخص A پیش از شخص B و شخص C پس از شخص D سخنرانی کند، به چند طریق می‌توان در این جلسه، برنامه سخنرانی‌ها را انجام داد؟

(۴) ۳۰

(۳) ۱۲۰

(۲) ۳۶۰

(۱) ۱۸۰

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

در نصف حالت‌ها شخص A قبل از B و در نصف حالت‌ها شخص B قبل از A سخنرانی می‌کند، همین استدلال برای شخص C و D نیز درست است، پس جواب مسئله برابر است با:

$$\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} \times 6! \right) = \frac{720}{4} = 180$$

۶) ۵ نفر به ترتیب می‌خواهند وارد اتاقی شوند، به چند طریق می‌توانند این کار را انجام دهند به طوری که نفرات مشخص A و B پشت سر هم وارد اتاق نشوند؟

۹۶ (۴)

۴۸ (۳)

۶۰ (۲)

۷۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

۵! = کل حالت‌های ورود ۵ نفر به ترتیب به داخل اتاق

$= \underbrace{A, B, C, D, E}_{\text{تا ۴}} =$ تعداد حالت‌هایی که A و B پشت سر هم وارد اتاق شوند.

$= ۴! \times ۲!$

$۷۲ = ۱۲۰ - ۴۸ = ۵! - ۴! \times ۲ =$ تعداد حالت‌هایی که A و B پشت سر هم وارد اتاق نشوند.

۷) از تساوی $P(n, ۲) + ۹۸ = P(۲n, ۲)$ ، مقدار n کدام است؟

۷ (۴)

۸ (۳)

۹ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$۲P(n, ۲) + ۹۸ = P(۲n, ۲)$$

$$\Rightarrow ۲ \times \frac{n!}{(n-۲)!} + ۹۸ = \frac{(۲n)!}{(۲n-۲)!}$$

$$\Rightarrow ۲ \times \frac{n \times (n-۱) \times (n-۲)!}{(n-۲)!} + ۹۸ = \frac{(۲n)(۲n-۱)(۲n-۲)!}{(۲n-۲)!}$$

$$\Rightarrow ۲n(n-۱) + ۹۸ = ۲n(۲n-۱) \Rightarrow ۲n^۲ - ۲n + ۹۸ = ۴n^۲ - ۲n$$

$$۲n^۲ = ۹۸ \Rightarrow n^۲ = ۴۹ \Rightarrow n = ۷$$

۸) به چند طریق ۳ بازیکن فوتبال، ۲ بازیکن والیبال و ۳ شناگر دور یک میز بنشینند، به طوری که افراد هم تیمی کنار هم باشند؟

(۱) ۷۲

(۲) ۱۴۴

(۳) ۲۱۶

(۴) ۴۳۲

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

همه بازیکنان فوتبال را یک بسته، بازیکنان والیبال و شنا را هر کدام یک بسته در نظر می‌گیریم، با توجه به اینکه بازیکنان می‌خواهند دور میز بنشینند و در مجموع سه بسته داریم،

آن‌گاه:

$$۱۴۴ = ۳! \times ۲! \times ۳! \times (۳-۱)!$$

جایگشت شناگرها جایگشت والیبالها جایگشت فوتبالیها جایگشت بسته‌ها

۹) در یک جلسه آموزشی میزگردی شامل ۴ دانش‌آموز کلاس پایه یازدهم و ۴ دانش‌آموز کلاس پایه دوازدهم تشکیل شده است. به چند حالت دانش‌آموزان در صندلی‌ها بنشینند، به طوری که در کنار هر دانش‌آموزی، دانش‌آموز هم‌پایه قرار نگیرد؟

(۱) ۱۴۴

(۲) ۲۸۸

(۳) ۲۷۶

(۴) ۱۱۵۲

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

برای آن که دانش‌آموزان هم‌پایه کنار هم ننشینند، باید دانش‌آموزان به صورت یک در میان روی صندلی بنشینند. بنابراین، ابتدا یازدهمی‌ها به شکل دایره‌ای و سپس دانش‌آموزان دوازدهمی در صندلی‌ها می‌نشینند، بنابراین:

$$۳! = (۴-۱)! = \text{دانش‌آموزان یازدهمی}$$

$$۴! = \text{دانش‌آموزان دوازدهمی}$$

$$۱۴۴ = ۶ \times ۲۴ = ۳! ۴! = \text{مطلوب سؤال}$$

۱۰) برای هر عدد طبیعی n داریم $n! = 2^{a_1} \times 3^{a_2} \times 5^{a_3} \times \dots$ مقدار $\sum_{i=1}^{\infty} a_i$ به ازای $n = 20$ ، کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) ۳۲ (۳) ۳۶ (۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$20! = 1 \times 2 \times 3 \times \dots \times 20$$

$$= 1 \times 2 \times 3 \times 2^2 \times 5 \times (2 \times 3) \times 7 \times 2^3 \times 3^2 \times (2 \times 5)$$

$$\times 11 \times (2^2 \times 3) \times 13 \times (2 \times 7) \times (3 \times 5) \times 2^4 \times 17 \times (2 \times 3^2) \times 19 \times (2^2 \times 5)$$

$$= 2^{18} \times 3^8 \times 5^4 \times 7^2 \times 11^1 \times 13^1 \times 17^1 \times 19^1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 18 + 8 + 4 + 2 + 4 \times 1 = 36$$

روش دوم:

نکته: تعداد عامل های عدد اول p در $n!$ از رابطه زیر به دست می آید: $\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$

$$\left[\frac{n}{p} \right] + \left[\frac{n}{p^2} \right] + \left[\frac{n}{p^3} \right] + \dots$$

بنابراین تعداد عامل های اول ۲ تا ۱۹ را در عدد $20!$ به دست می آوریم.

$$2 \text{ های } = \left[\frac{20}{2} \right] + \left[\frac{20}{4} \right] + \left[\frac{20}{8} \right] + \left[\frac{20}{16} \right] = 18$$

$$3 \text{ های } = \left[\frac{20}{3} \right] + \left[\frac{20}{9} \right] = 8$$

$$5 \text{ های } = \left[\frac{20}{5} \right] = 4$$

$$7 \text{ های } = \left[\frac{20}{7} \right] = 2$$

$$11 \text{ های } = \left[\frac{20}{11} \right] = \left[\frac{20}{13} \right] = \left[\frac{20}{17} \right] = \left[\frac{20}{19} \right] = 1$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = 18 + 8 + 4 + 2 + 4 \times 1 = 36$$

۱۱) به چند طریق می توان ۶ دانشجو و ۷ استاد را به صورت یکی در میان در یک ردیف با ۱۳ صندلی نشانند؟

- (۱) $13!$ (۲) $\frac{13!}{6! \times 7!}$ (۳) $6! \times 7!$ (۴) $(6!)^2 \times (7!)^2$

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

تعداد راه های چینش این افراد به صورت یکی در میان برابر است با: $7! \times 6!$

چون استادها یک نفر بیش ترند، فقط یک حالت برای یکی در میان نشستن وجود دارد. اگر برابر بودند باید جواب را در ۲ ضرب می کردیم.

۱۲) امیر، علی و رضا با ۳ نفر دیگر در یک شرکت حضور دارند. این ۶ نفر در یک ردیف پشت سر هم می‌ایستند. در چند حالت امیر جلوتر از علی و علی جلوتر از رضا قرار دارد؟

(۱) ۷۲۰

(۲) ۷۲

(۳) ۱۲۰

(۴) ۱۴۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

۶ نفر به ۶! طریق می‌توانند در یک صف قرار بگیرند. اما ما دنبال تعداد حالاتی هستیم که امیر جلوتر از علی و علی جلوتر از رضا باشد. بدون توجه به افرادی که بین این سه نفر قرار می‌گیرند، آن‌ها نسبت به هم ۶ وضعیت دارند:

→

امیر علی رضا

علی رضا امیر

رضا امیر علی

امیر رضا علی

امیر علی رضا

علی امیر رضا

همان‌طور که می‌بینید، از بین این ۶ حالت تنها حالت اول مطلوب مسئله است. پس $\frac{1}{6}$ حالات کل قابل قبول است. در نتیجه $\frac{1}{6}$ کل جایگشت‌های ۶ نفر جواب مسئله است.

$$\Rightarrow ۱۲۰ = (۶!) \cdot \frac{1}{6} = \text{تعداد حالات قابل قبول}$$

۱۳) حروف کلمه «استیصال» را روی ۷ کارت می‌نویسیم. با این ۷ کارت چند کلمه ۵ حرفی می‌توان ساخت به طوری که حروف صدادار و بی صدا یک در میان کنار هم قرار بگیرند؟

(۱) ۱۱۲

(۲) ۷۲

(۳) ۱۰۸

(۴) ۹۶

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

مجموعه حروف صدادار کلمه استیصال {آ، ی} و مجموعه حروفی بی‌صدای آن {س، ت، ص، ل} است. برای اینکه حروف بی‌صدا و صدادار یک در میان کنار هم باشند دو حالت کلی زیر امکان‌پذیر است:

الف) ۳ حرف بی‌صدا و ۲ حرف صدادار باشد:

بی صدا صدادار بی صدا صدادار بی صدا

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جایگشت حروف بی صدا} \\ \text{جایگشت حروف صدادار} \end{array} \right. : \left(\begin{array}{c} 4 \\ 3 \end{array} \right) 3! = 4 \times 6 = 24 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{جایگشت حروف بی صدا} \\ \text{جایگشت حروف صدادار} \end{array}} \right\} 24 \times 3 = 72$$

۳ حالت: (آ ی) و (ی آ) و (آ آ):

ب) ۲ حرف بی‌صدا و ۳ حرف صدادار باشد:

صدادار بی صدا صدادار بی صدا صدادار

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{جایگشت حروف بی صدا} \\ \text{جایگشت حروف صدادار} \end{array} \right. : \left(\begin{array}{c} 4 \\ 2 \end{array} \right) 2! = 6 \times 2 = 12 \quad \left. \vphantom{\begin{array}{l} \text{جایگشت حروف بی صدا} \\ \text{جایگشت حروف صدادار} \end{array}} \right\} 12 \times 3 = 36$$

۳ حالت: (آ آ ی) و (ی آ آ) و (آ ی آ):

حال طبق اصل جمع، تعداد کل کلمات مطلوب برابر $72 + 36 = 108$ است.

۱۴) با حرف کلمه ی «گل پیرا» چند کلمه ی چهار حرفی (بدون تکرار حروف) می توان نوشت که در آنها دو حرف «پ» و «ی» وجود داشته باشند ولی کنار هم نیاشند؟

۷۲ (۱)

۲۸۸ (۲)

۲۶۴ (۳)

۳۶۰ (۴)

پاسخ: **گزینه ۱**

گزینه «۱»

تعداد کل کلمه های چهار حرفی شامل «پ» و «ی» که با شش حرف متمایز کلمه ی «گل پیرا» می توان نوشت، برابر است با $144 = 4! \times \binom{4}{2}$ ، زیرا باید ابتدا دو حرف از میان حرف هایی غیر از «پ» و «ی» انتخاب کنیم که پس از این کار، این دو حرف در کنار «پ» و «ی» چهار شی متمایز هستند که در کنار هم $4!$ جایگشت دارند.

در این ۱۴۴ حالت، تعداد حالت هایی را به دست می آوریم که «پ» و «ی» کنار هم باشند. به این منظور، دو حرف از میان چهار حرف باقی مانده انتخاب می کنیم $\binom{4}{2}$ (حالت). اما «پ» و «ی» نیز کنار هم $2!$ جایگشت دارند و با دو حرف دیگر، تشکیل سه شی متمایز می دهند که این سه شی در کنار هم $3!$ جایگشت دارند؛ پس طبق اصل ضرب در $72 = 6 \times 2 \times 6 = 3! \times 2! \times \binom{4}{2}$ حالت «پ» و «ی» کنار هم هستند، بنابراین:

$$72 = 144 - 72 = \text{تعداد حالت های مطلوب سوال}$$

۱۵) چند جایگشت پنج حرفی با حروف کلمه «توابع» می توان نوشت که بین حروف «و» و «ا» دقیقاً یک حرف قرار گیرد و دو حرف دیگر کنار هم نیاشند؟

۱۸ (۱)

۳۶ (۲)

۲۴ (۳)

۱۲ (۴)

پاسخ: **گزینه ۴**

گزینه «۴»

تنها حالت ممکن به صورت زیر است.

_____ و یا ا _____

$$12 = 3! \times 2! \downarrow$$

برای بقیه حروف برای «و» و «ا»

۱۶) با حروف کلمه «اردیبهشت»، چند کلمه ۴ حرفی و بدون تکرار حروف می‌توان نوشت، به طوری که حروف «ب» و «ت» کنار یکدیگر باشند؟

(۱) ۱۰۰

(۲) ۱۵۰

(۳) ۱۶۰

(۴) ۱۸۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

راه حل اول:

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{2 \ 1}_{\text{حروف ب و ت}} \ \underline{6 \ 5} = 60 \\ \underline{6} \ \underbrace{2 \ 1}_{\text{حروف ب و ت}} \ 5 = 60 \\ \underline{6 \ 5} \ \underbrace{2 \ 1}_{\text{حروف ب و ت}} = 60 \end{array} \right\} \Rightarrow 60 + 60 + 60 = 180$$

راه حل دوم: حروف «ب» و «ت» انتخاب شده‌اند، ابتدا از ۶ حرف باقیمانده ۲ حرف دیگر انتخاب می‌کنیم که به $\binom{6}{2} = 15$ حالت ممکن است. حروف «ب» و «ت» را در یک بسته فرضی قرار می‌دهیم که این بسته با دو حرف دیگر ۳ جایگشت دارد. همچنین در این بسته، حروف «ب» و «ت» در کنار هم به ۲! حالت جابه‌جا می‌شوند. پس تعداد کل حالت‌ها طبق اصل ضرب برابر است با:

$$\binom{6}{2} \times 3! \times 2! = 15 \times 6 \times 2 = 180$$

۱۷) اگر در یک سالن دو ردیف صندلی و هر ردیف شامل ۷ صندلی باشد، به چند طریق ۵ دانش‌آموز اول دبیرستان و ۴ دانش‌آموز دوم دبیرستان می‌توانند روی آن‌ها بنشینند طوری که اولی‌ها در ردیف اول باشند؟

(۱) $12 \times 9!$

(۲) $21 \times 9!$
(۴) $P(7, 5) P(7, 4)$

(۳) 735

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا ۵ دانش‌آموز اول دبیرستان را در ۷ صندلی ردیف اول جای می‌دهیم که این کار به $P(7, 5)$ حالت امکان‌پذیر است. حال که ۵ دانش‌آموز اولی در ردیف اول نشسته‌اند، ۹ صندلی (۲ صندلی ردیف اول و ۷ صندلی ردیف دوم) خالی مانده است. برای نشستن ۴ دانش‌آموز دوم دبیرستان روی این ۹ صندلی، $P(9, 4)$ حالت امکان‌پذیر است. بنابراین تعداد حالت‌ها به کمک اصل ضرب برابر می‌شود با:

$$P(7, 5) \times P(9, 4) = \frac{7!}{2!} \times \frac{9!}{5!} = \frac{7! \times 9!}{5! \times 2!} = \frac{7 \times 6 \times 5! \times 9!}{2 \times 5!} = 21 \times 9!$$

۱۸) در چند جایگشت از حروف کلمه peiman، عبارت pe وجود دارد ولی عبارت man وجود ندارد؟

۹۸ (۲)

۱۱۴ (۱)

۸۴ (۴)

۹۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

pe را یک بسته در نظر می‌گیریم که به همراه i, m, a, n دارای $۱۲۰ = ۵!$ جایگشت‌اند. در این ۱۲۰ جایگشت آن‌هایی که man دارند را نمی‌خواهیم. تعداد این جایگشت‌ها که به صورت $\boxed{pe}\boxed{man}i$ هستند برابر $۶ = ۳!$ است، لذا جواب برابر است با: $۱۱۴ = ۱۲۰ - ۶$.

۱۹) با حروف کلمه «numbers» چند کلمه ۴ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت که در آن‌ها حروف e و b همواره کنار هم باشند؟

۱۲۰ (۴)

۶۰ (۳)

۸۰ (۲)

۴۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

$$\left. \begin{array}{l} \underbrace{۲ \times ۱}_{e,b} \times ۵ \times ۴ = ۴۰ \\ ۵ \times \underbrace{۲ \times ۱}_{e,b} \times ۴ = ۴۰ \\ ۵ \times ۴ \times \underbrace{۲ \times ۱}_{e,b} = ۴۰ \end{array} \right\} \Rightarrow \text{جمع} = ۱۲۰$$

۲۰) با حروف کلمه «NADERI» چند کلمه چهار حرفی بدون تکرار می‌توان نوشت به‌طوری که اگر حرف «N» در کلمه باشد، حروف R و A یکی در ابتدا و دیگری در انتهای کلمه و یا کلمه چهار حرفی فاقد حرف N باشد؟

۲۴۰ (۴)

۱۴۴ (۳)

۱۳۲ (۲)

۱۲۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

دو حالت را می‌توان در نظر گرفت:

حالت ۱) اصلاً حرف «N» در کلمه نباشد، آنگاه تعداد کلمه‌های چهار حرفی که می‌توان نوشت طبق اصل ضرب عبارت است از:

$$\underline{5} \times \underline{4} \times \underline{3} \times \underline{2} = 120$$

حالت ۲) اگر حرف «N» در کلمه باشد و حروف A و R در ابتدا و انتهای کلمه باشند:

$$\begin{array}{c} \xrightarrow{\text{! جایگشت}} \\ \frac{A}{1} \frac{N}{1} \frac{\{D, E, I\}}{3} \frac{R}{1} \Rightarrow 2! \times 3 \times 2! = 12 \\ \xrightarrow{\text{! جایگشت R, A}} \end{array}$$

بنابراین طبق اصل جمع داریم:

$$120 + 12 = 132 = \text{کل حالات}$$

۲۱) با حروف کلمه «خورشید» چندکلمه شش حرفی بدون تکرار می‌توان نوشت که در دو طرف حرف «ر» حرفی قرار داشته باشد؟

۵ × ۵! (۴)

۴ × ۵! (۳)

۳ × ۵! (۲)

۲ × ۵! (۱)

پاسخ: **گزینه ۳**

گزینه «۳»

اگر «ر» در ابتدا و انتها قرار گیرد فقط در یک طرفش حرف قرار دارد. پس از کل حالات، حالاتی که «ر» در ابتدا یا انتها قرار می‌گیرد را کم می‌کنیم.

حالاتی که «ر» اولین حرف سمت چپ باشد	-	تعداد کل حالات
$1 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$		$6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$

حالاتی که «ر» اولین حرف سمت راست باشد	-
$5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1 \times 1$	

$$= 6! - 5! - 5! = 6 \times 5! - 2 \times 5! = 4 \times 5!$$

۲۲) با حروف کلمه improve چند کلمه هفت حرفی بدون توجه به معنی کلمه می‌توان نوشت که با حرف i شروع شده و حروف کلمه pro در کنار هم باشند؟

۴۲۰ (۲)

۳۶ (۴)

۱۴۴ (۱)

۵۷۶ (۳)

پاسخ: **گزینه ۱**

گزینه «۱»

حرف i به جای حرف اول از سمت چپ قرار می‌گیرد و در نتیجه حرف اول تنها یک حالت دارد. حروف کلمه pro را در کنار هم در یک بسته قرار می‌دهیم. این سه حرف در کنار هم ۳! جایگشت دارند. این بسته با حروف باقی مانده یعنی m, v, e، چهار شیء را تشکیل می‌دهند که با هم ۴! جایگشت دارند. در نهایت طبق اصل ضرب تعداد حالت‌ها برابر است با:

$$3! \times 4! = 144$$

۲۳) سالنی دارای دو ردیف ۵ تایی صندلی می‌باشد. ۳ دانش‌آموز دهم و ۲ دانش‌آموز یازدهم داریم. می‌خواهیم این دانش‌آموزان در این سالن بنشینند. چند حالت وجود دارد که همه دانش‌آموزان دهم در ردیف اول بنشینند؟

۱۸۴۰ (۴)

۲۰ (۳)

۲۵۲۰ (۲)

۱۲۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

۳ دانش‌آموز دهم در یک ردیف ۵ تایی: $P(5, 3) = 60$

۲ دانش‌آموز یازدهم در بقیه صندلی‌ها (۷ صندلی): $P(7, 2) = 42$

$$2520 = 60 \times 42 : \text{کل}$$

۲۴) ۳ زوج می‌خواهند روی ۶ صندلی در یک ردیف بنشینند. آن‌ها به چند حالت می‌توانند روی صندلی‌ها بنشینند به طوری که هر سه زوج هم‌زمان کنار هم ننشسته باشند؟

۶۹۶ (۴)

۷۰۸ (۳)

۶۷۲ (۲)

۷۱۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

تعداد کل حالت‌ها:

$$6! = 720$$

اگر هر سه زوج در کنار یکدیگر بنشینند:

$$3! \times 2! \times 2! \times 2! = 48$$

$$672 = 720 - 48 = \text{تعداد حالات مطلوب}$$

۲۵) با حروف کلمه «تقویم» و بدون تکرار حروف چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت به طوری که بین حروف «و» و «م» دقیقاً یک حرف قرار بگیرد؟

۳۲ (۴)

۴۸ (۳)

۲۴ (۲)

۳۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

ابتدا به ۳ طریق می‌توان حرف بین «و» و «م» را از بین حروف {ت، ق، ی} انتخاب کرد. سپس به ۲ طریق حرف «م» و «و» می‌توانند جایشان را عوض کنند. حال حرف انتخاب شده و حروف «و» و «م» را در یک بسته قرار می‌دهیم. این بسته و دو حرف باقی مانده به ۳! طریق جایگشت دارند بنابراین تعداد کل کلمات برابر است با:

$$3 \times 2 \times 3! = 36$$

۲۶) کدام گزینه، مربع کامل است؟

(۴) $\frac{۲۳! \times ۲۴!}{۳}$

(۳) $\frac{۲۵! \times ۲۶!}{۳}$

(۲) $\frac{۲۶! \times ۲۷!}{۳}$

(۱) $\frac{۲۷! \times ۲۸!}{۳}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

گزینه «۱»:

$$\frac{۲۷! \times ۲۸!}{۳} = ۲۷! \times ۲۷! \times \frac{۲۸}{۳} = (۲۷!)^2 \times \frac{۲۸}{۳}$$

گزینه «۲»:

$$\frac{۲۷! \times ۲۶!}{۳} = \frac{۲۷ \times ۲۶! \times ۲۶!}{۳} = ۹ \times (۲۶!)^2 = (۳ \times ۲۶!)^2$$

گزینه «۳»:

$$\frac{۲۵! \times ۲۶!}{۳} = \frac{۲۵! \times ۲۵! \times ۲۶}{۳} = (۲۵!)^2 \times \frac{۲۶}{۳}$$

گزینه «۴»:

$$\frac{۲۳! \times ۲۴!}{۳} = \frac{۲۳! \times ۲۴ \times ۲۳!}{۳} = ۸ \times (۲۳!)^2$$

۲۷) با حروف کلمه «آزمون» چند کلمه پنج حرفی می‌توان نوشت به‌طوری که حروف «م» و «ن» همواره کنار هم باشند؟

(۴) ۵۲

(۳) ۴۴

(۲) ۳۶

(۱) ۴۸

پاسخ: گزینه ۱

دو حرف «م» و «ن» را یک شیء در نظر گرفته و در کل چهار شیء داریم که به ۴! حالت کنار هم قرار می‌گیرند. از طرفی دو حرف فوق دارای ۲! جایگشت می‌باشند، پس داریم:
 $۴۸ = (۲ \times ۱) \times (۴ \times ۳ \times ۲ \times ۱) = ۲! \times ۴! =$ تعداد کل جایگشت‌ها

۲۸) با حروف کلمه «جهانگردی» چند کلمه ۶ حرفی می‌توان نوشت که با حرف نقطه‌دار شروع شده و به «دی» ختم شود؟ (بدون توجه به معنی کلمه ساخته شده است.)

(۴) ۱۸۰

(۳) ۱۵۰

(۲) ۱۲۰

(۱) ۹۰

پاسخ: گزینه ۲

برای حرف اول ۲ انتخاب «ج» و «ن» وجود دارد. همچنین ۲ حرف آخر کلمه تنها یک حالت دارد و به صورت «دی» است. بنابراین تعداد کل کلمات برابر است با:

$$۲ \times P(۵, ۳) \times ۱ = ۲ \times \frac{۵!}{۲!} = ۵! = ۱۲۰$$

(۲۹) با حروف کلمه «compute»، چند کلمه ۷ حرفی بدون تکرار حروف می‌توان نوشت به‌طوری که حرف m بعد از o و حرف o بعد از c باشد؟ (نه لزوماً بلافاصله)

$$\frac{7!}{3} \quad (۲)$$

$$۵! \quad (۴)$$

$$\frac{7!}{۲} \quad (۱)$$

$$\frac{7!}{۶} \quad (۳)$$

پاسخ: **گزینه ۳**

قرار است m بعد از o و o بعد از c بیاید. اگر گفته می‌شد بلافاصله بعد از هم بیایند c, o, m را یک بسته می‌کردیم و جایگشت حساب می‌کردیم. ولی فقط گفته شده است، بعد از هم بیایند، در این حالت ابتدا کل جایگشت‌ها را حساب می‌کنیم یعنی ۷!. حال حروف موردنظر ما m و o و c هستند که ۳! جایگشت دارند، یعنی ۶ حالت. پس در این ۷! جایگشت، به هر یک از ۶ حالت حروف c, o, m تعداد $\frac{7!}{6}$ حالت تعلق می‌گیرد. در بین این ۶ حالت، یکی مطلوب است و آن هم زمانی که m بعد از o و o بعد از c قرار بگیرد، پس تعداد کل حالات مطلوب برابر است با:

$$\frac{7!}{6} \times 1 = \frac{7!}{6}$$

(۳۰) با حروف کلمه «فاکتوریل» چند کلمه ۵ حرفی بدون تکرار حروف و بدون توجه به معنی می‌توان نوشت که در آن کلمه با حرف نقطه‌دار شروع شود؟

$$\frac{7!}{۲!} \quad (۴)$$

$$\frac{7!}{۳!} \quad (۳)$$

$$\frac{۸!}{۳!} \quad (۲)$$

$$\frac{۶!}{۲!} \quad (۱)$$

پاسخ: **گزینه ۴**

«فاکتوریل» ۸ حرف دارد که ۳ حرف آن نقطه‌دار است. بنابراین ابتدا یک حرف از سه حرف نقطه‌دار را انتخاب می‌کنیم و سپس حروف دیگر را می‌چینیم:

$$۳ \times P(۷, ۴) = ۳ \times \frac{7!}{۳!} = \frac{7!}{۲!}$$

توجه: حرف «ی» در صورتی که در انتهای کلمه نباشد و به‌صورت چسبان باشد، نقطه‌دار است.

(۳۱) در چند جایگشت از حروف کلمه sabzipolu عبارت sabzi وجود دارد ولی عبارت pol وجود ندارد؟

$$۱۱۸ \quad (۲)$$

$$۱۱۲ \quad (۴)$$

$$۱۲۰ \quad (۱)$$

$$۱۱۴ \quad (۳)$$

پاسخ: **گزینه ۳**

ابتدا تعداد جایگشت‌هایی را که عبارت sabzi دارد به‌دست می‌آوریم:

$$۱۲۰ = ۵! \text{ تعداد جایگشت‌ها} \Rightarrow ۵ \text{ شی} \Rightarrow \text{sabzi - P - o - l - u}$$

تعداد جایگشت‌هایی که sabzi و pol را دارد.

$$\text{sabzi - pol - u} \Rightarrow ۳ \text{ شی} \Rightarrow ۳! = ۶$$

تعداد جایگشت‌های مطلوب:

$$۱۱۴ = ۱۲۰ - ۶ = ۵! - ۳!$$

۳۲) با حروف کلمه «جمهوری» و بدون تکرار حروف، چند کلمه ۵ حرفی می‌توان نوشت که با حرف «ج» شروع و به «ر» ختم شود؟

۱۸ (۴)

۳۶ (۳)

۲۴ (۲)

۱۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$\frac{1}{r} \times \frac{2}{j} \times \frac{3}{h} \times \frac{4}{t} \times \frac{1}{c} = 24$$

۳۳) می‌خواهیم با حروف صدادار انگلیسی جدول زیر را به گونه‌ای پُر کنیم که حروف هیچ دو خانه مجاوری تکراری نباشد، به چند طریق این کار ممکن است؟ (در زبان انگلیسی ۵ حرف صدادار داریم.)

--	--	--	--	--	--

۵۱۲۰ (۱)

۳۲۴۰ (۲)

۴۰۹۶ (۳)

۶۰۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

می‌دانیم حروف صدادار انگلیسی ۵ تا هستند:

{a, o, e, i, u}

در خانه اول (برای مثال از سمت چپ) به ۵ حالت حرف صدادار می‌تواند قرار گیرد. در خانه بعد به‌جز حرفی که در خانه اول قرار گرفته، ۴ حرف دیگر می‌تواند قرار گیرد و به همین ترتیب برای هر یک از خانه‌های بعدی هم ۴ حالت داریم.

۵	۴	۴	۴	۴	۴
---	---	---	---	---	---

$$\Rightarrow 5 \times 4^5 = 5 \times 1024 = 5120$$

۳۴) سه فرزند همراه با پدر و مادرشان برای انداختن عکس یادگیری در کنار هم می‌ایستند به چند طریق این کار امکان‌پذیر است بطوری‌که پدر و مادر در طرفین سه فرزند باشند؟

۳۶ (۴)

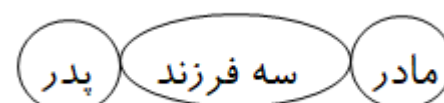
۱۲ (۳)

۱۸ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»



تعداد جایگشت‌های سه فرزند $3!$ و تعداد جایگشت‌های پدر و مادر $2!$ است. بنابراین جواب $3! \times 2! = 12$ است.

۳۵) ۷ مرد و ۶ زن در یک اتوبوس حضور دارند؛ اگر اتوبوس در ۸ ایستگاه توقف کند، این افراد به چند طریق می‌توانند از اتوبوس پیاده شوند؟

(۱) $7^8 \times 6^8$

(۲) 8^{13}

(۳) 13^8

(۴) $6^{13} \times 7^{13}$

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

فرقی نمی‌کند که چه تعداد خانم و چه تعداد آقا در اتوبوس حضور داشته باشند. چون در اتوبوس کلاً $6 + 7 = 13$ نفر حضور دارند و ضمناً برای پیاده‌شدن هر فرد ۸ حالت مختلف وجود دارد پس جواب مسئله برابر است با:

$$\underbrace{8 \times 8 \times 8 \times \dots \times 8}_{13 \text{ بار}} = 8^{13}$$

۳۶) در یک شهرک مسکونی ۵ بلوار اصلی، در هر بلوار بین ۶ تا ۸ خیابان، در هر خیابان بین ۳ تا ۵ کوچه و در هر کوچه بین ۵ تا ۱۰ خانه قرار دارد. اختلاف تعداد حداقل و حداکثر خانه‌هایی که این شهرک می‌تواند داشته باشد، کدام است؟ (هیچ خیابانی بین دو بلوار، هیچ کوچه‌ای بین دو خیابان و هیچ خانه‌ای بین هیچ دو کوچه‌ای مشترک نیست.)

(۱) ۲۳۵۰

(۲) ۴۵۰

(۳) ۱۰۰۰

(۴) ۱۵۵۰

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

کمترین تعداد خانه در حالت ۵ بلوار، ۶ خیابان، ۳ کوچه و ۵ خانه رخ می‌دهد:

$$450 = 5 \times 6 \times 3 \times 5 = \text{کمترین}$$

بیشترین تعداد خانه در حالت ۵ بلوار، ۸ خیابان، ۵ کوچه و ۱۰ خانه رخ می‌دهد:

$$2000 = 5 \times 8 \times 5 \times 10 = \text{بیشترین}$$

پس داریم:

$$2000 - 450 = 1550$$

۳۷) یک نان سنگک، یک نان بربری و یک نان لواش را به چند طریق می‌توان بین ۵ نفر تقسیم کرد، به طوری که هر یک از افراد دریافت‌کننده نان، دقیقاً یک عدد نان دریافت کنند؟

(۲) $P(10, 6)$

(۱) $P(10, 7)$

(۴) $P(5, 3)$

(۳) $P(5, 2)$

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

نان سنگک می‌تواند ۵ انتخاب داشته باشد تا به شخص خاصی تعلق گیرد.

حال نان بربری نمی‌تواند به آن شخص برسد و ۴ حالت برای آن وجود دارد.

نان لواش هم ۳ انتخاب دارد. پس در مجموع داریم:

$$5 \times 4 \times 3 = \frac{5!}{2!} = P(5, 3)$$

۳۸) چند عدد ۳ رقمی می‌توان ساخت، به طوری که هم رقم زوج و هم رقم فرد داشته باشد؟ (تکرار مجاز است).

(۲) ۶۷۴

(۱) ۶۷۳

(۴) ۶۷۶

(۳) ۶۷۵

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

تعداد کل اعداد سه رقمی که با ارقام صفر تا ۹ ساخته می‌شوند، برابر با $9 \times 10 \times 10 = 900$ است. از طرفی تعداد کل اعداد سه رقمی که فقط با ارقام فرد ۱، ۳، ۵، ۷ و ۹ نوشته می‌شوند، برابر با $5 \times 5 \times 5 = 125$ است. همچنین تعداد کل اعداد سه رقمی که فقط شامل ارقام زوج ۰، ۲، ۴، ۶ و ۸ هستند، برابر با $4 \times 5 \times 5 = 100$ می‌باشد. لذا داریم:

(اعداد ۳ رقمی فقط شامل ارقام زوج + اعداد ۳ رقمی فقط شامل ارقام فرد) - کل اعداد ۳ رقمی = جواب

$$675 = \text{جواب} \Rightarrow 900 - (125 + 100)$$

۳۹) حاصل عبارت روبه‌رو کدام است؟

$$\frac{12 \times (13! + 12!)}{13! - 12!}$$

(۲) ۱۳

(۱) ۱۲

(۴) ۱۱

(۳) ۱۴

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

$$\frac{12 \times (13! + 12!)}{13! - 12!} = \frac{12 \times 12! (13 + 1)}{12! (13 - 1)} = \frac{12 \times 12! \times 14}{12! \times 12} = 14$$

۴۰ دو زیر مجموعه متمایز از مجموعه $\{a, b, c, d, e\}$ را به چند طریق می‌توان انتخاب کرد به گونه‌ای که اشتراکشان تهی باشد؟

۲۴۲ (۲)

۱۲۱ (۱)

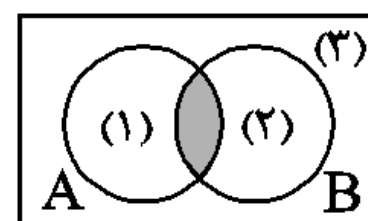
۱۸۰ (۴)

۲۴۳ (۳)

پاسخ: گزینه ۱

گزینه «۱»

اگر بخواهیم اشتراک ۲ زیرمجموعه A و B تهی باشد، باید در ناحیه هاشورزده نمودار ون زیر هیچ‌یک از اعضای a, b, c, d, e قرار نگیرد؛ پس برای هر کدام از اعضا سه ناحیه مختلف (۱) یا (۲) یا (۳) برای قرارگیری وجود دارد پس خواهیم داشت:



$$۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ \times ۳ = ۳^۵ = ۲۴۳$$

حال توجه کنید که حالت $A = \emptyset$ و $B = \emptyset$ قابل قبول نیست، پس از عدد ۲۴۳ یک واحد کم می‌کنیم تا به عدد ۲۴۲ برسیم. در ضمن توجه کنید که برای مثال حالت زیر در شرایط مسأله ما در واقع یک بار باید حساب می‌شدند ولی ما آن‌ها را دو بار حساب کرده‌ایم:

$$(A = \{a, b\}, B = \{c, d, e\}) \text{ و } (A = \{c, d, e\}, B = \{a, b\})$$

پس در این روش هر حالت را دو بار حساب کرده‌ایم. در نتیجه باید عدد ۲۴۲ را بر ۲ تقسیم کنیم که جواب نهایی ۱۲۱ حالت می‌شود.

۴۱) چهار فوتبالیست و سه والیبالیست به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به‌طوری که حداقل دو فوتبالیست کنار هم باشند؟

۵۰۴۰ (۲)

۳۶۰۰ (۱)

۴۸۹۶ (۴)

۱۷۲۸ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

گزینه «۴»

ابتدا حالتی را که هیچ دو فوتبالیست کنار هم نیستند، محاسبه کرده و جواب را از تعداد کل حالات ممکن برای قرار گرفتن ۷ نفر کنار هم (۴ فوتبالیست و ۳ والیبالیست) کم می‌کنیم.

وقتی هیچ دو فوتبالیستی کنار هم نیستند که والیبالیست‌ها بین فوتبالیست‌ها قرار گرفته باشند. (فوفوفوف)

چون فوتبالیست‌ها و والیبالیست‌ها متفاوتند پس بین خود نیز جابه‌جا می‌شوند پس تعداد جایگشت‌های والیبالیست‌ها ۳! و تعداد جایگشت‌های فوتبالیست‌ها ۴! می‌باشد.

پس تعداد کل جایگشت‌های آن‌ها به‌صورت یک در میان $۳! \times ۴! = ۱۴۴$ است.

تعداد کل جایگشت‌های ۷ نفر نیز $۷! = ۵۰۴۰$ می‌باشد که:

$$۷! - (۳! \times ۴!) = ۵۰۴۰ - ۱۴۴ = ۴۸۹۶$$

پس ۴۸۹۶ حالت وجود دارد.

۴۲) به چند طریق می‌توان دایره‌های زیر را با پنج رنگ سیاه، سفید، قرمز، آبی و زرد رنگ‌آمیزی کرد به‌طوری که دایره سوم همواره سیاه باشد و هیچ دو دایره مجاور هم دارای رنگ‌های یکسانی نباشند؟



۱۲۰ (۲)

۱۴۴ (۱)

۶۲۵ (۴)

۲۵۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

دایره سوم فقط یک حالت دارد و دو دایره سمت چپ و راست آن هرکدام به ۴ حالت می‌توانند رنگ‌آمیزی شوند هم‌چنین دو دایره ابتدا و انتهای نیز هرکدام به چهار حالت (به‌جز رنگ دایره کناری‌شان) رنگ‌آمیزی می‌شوند.



$$۴ \times ۴ \times ۱ \times ۴ \times ۴ = ۴^۴ = ۲۵۶$$

p,s,a,ای جایگشت های u
_____, _____, _____, _____, _____, _____, _____

۴۵) در چند جایگشت از حروف کلمه tehran حرف r بعد از t آمده است، به طوری که این دو حرف در کنار یکدیگر نیستند؟

۲۴۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

۴۸۰ (۴)

۳۶۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

ابتدا تمام جایگشت‌هایی را که حرف r و t در کنار یکدیگر نیستند، می‌یابیم. برای این کار تمام حالات را محاسبه می‌کنیم و حالاتی را که این دو کنار هم هستند، از آن کم می‌کنیم:

$$\left. \begin{array}{l} ۶! = \text{همه حالات} \\ ۲! \times ۵! = \text{کنار هم بودن } t \end{array} \right\} \Rightarrow \text{حالات مطلوب} = ۶! - ۲ \times ۵!$$

$$= ۷۲۰ - ۲۴۰ = ۴۸۰$$

در نیمی از حالات r بعد از t و نیمی دیگر از حالات r قبل از t آمده است؛ پس مطلوب مسئله برابر است با: $\frac{۴۸۰}{۲} = ۲۴۰$

۴۶) اگر $\frac{(n-۲)!}{n^۲-۵n+۶} = ۷۲ \times ۲۱۰ \times ۲۴$ باشد، n کدام است؟

۱۳ (۲)

۱۱ (۱)

۹ (۴)

۱۲ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$(n-۲)! = (n-۲)(n-۳)(n-۴) \times \dots \times ۱$$

$$n^۲ - ۵n + ۶ = (n-۲)(n-۳)$$

$$\Rightarrow \frac{(n-۲)!}{n^۲-۵n+۶} = \frac{(n-۲)(n-۳)(n-۴) \times \dots \times ۱}{(n-۲)(n-۳)} = (n-۴)(n-۵) \times \dots \times ۱$$

$$= (n-۴)!$$

$$\begin{array}{ccccccc} ۷۲ & \times & ۲۱۰ & \times & ۲۴ & = & ۹ \times ۸ \times ۷ \times \dots \times ۲ \times ۱ = ۹! \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow & & \\ ۸ \times ۹ & & ۷ \times ۶ \times ۵ & & ۴ \times ۳ \times ۲ & & \end{array}$$

$$\Rightarrow (n-۴)! = ۹!$$

$$\Rightarrow n-۴ = ۹ \Rightarrow n = ۱۳$$

۴۷) اگر $P(n, 2) = 5n + 7$ باشد، حاصل $P(n - 3, n - 4)$ کدام است؟

۴! (۲)

۵! (۱)

۲! (۴)

۳! (۳)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

$$P(n, 2) = \frac{n!}{(n-2)!} = 5n + 7$$

$$\Rightarrow \frac{n(n-1)(n-2)!}{(n-2)!} = 5n + 7$$

$$\Rightarrow n^2 - n = 5n + 7$$

$$\Rightarrow n^2 - 6n - 7 = 0 \Rightarrow (n - 7)(n + 1) = 0 \Rightarrow \begin{cases} n = -1 & \text{غ ق} \\ n = 7 \end{cases}$$

$$P(n - 3, n - 4) = P(4, 3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 4!$$

۴۸) در مسابقه فوتبال، در ضربات پنالتی هر تیم ۵ ضربه می‌زند که اگر نتیجه مساوی شود، کار به ضربه ششم می‌کشد و تا جایی که فقط یک تیم ضربه‌اش را گل کند، ادامه می‌یابد. اگر بعد از اتمام ضربات ششم مسابقه تمام شود، چند حالت برای چینش گل‌شدن یا نشدن همه ضربات وجود دارد؟

۱۲۶ (۲)

۱۰۰۸ (۱)

۲۵۲ (۴)

۵۰۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

گزینه «۳»

در ابتدا باید شرط تساوی را اعمال کنیم؛ تساوی می‌تواند ۰-۰، ۱-۱ و ... و ۵-۵ باشد.

برای ۰-۰ و ۵-۵ فقط یک حالت وجود دارد ولی برای ۱-۱ تیم A دارای $\binom{5}{1}$ حالت و تیم B دارای $\binom{5}{1}$ حالت است که هرکدام یک ضربه را گل کند و به همین ترتیب داریم:

$$\binom{5}{0}^2 + \binom{5}{1}^2 + \binom{5}{2}^2 + \binom{5}{3}^2 + \binom{5}{4}^2 + \binom{5}{5}^2$$

$$= 1 + 25 + 100 + 100 + 25 + 1 = 252$$

حال در ضربه ششم فقط یکی از تیم‌های A و B باید ضربه‌اش را گل کند که در مجموع ۲ حالت ممکن است:

$$252 \times 2 = 504$$

۴۹ کتاب ۳ ریاضی متمایز و ۲ کتاب فیزیک متمایز را به چند طریق می‌توان کنار هم قرار داد به‌گونه‌ای که حداقل ۲ کتاب ریاضی کنار هم باشند؟

(۲) ۱۱۰

(۱) ۱۰۸

(۴) ۱۱۴

(۳) ۱۱۲

پاسخ: گزینه ۱

می‌توانیم مسئله را با کمک اصل متمم حل کنیم. متمم آنکه حداقل ۲ کتاب ریاضی کنار هم باشند، آن است که هیچ دو کتابی از میان کتاب‌های ریاضی در کنار هم نباشند که در این صورت کتاب‌ها باید یک در میان قرار بگیرند.

تعداد کل جایگشت‌های این ۵ کتاب برابر ۵! است. اگر کتاب‌ها یک در میان قرار بگیرند، آنگاه ردیف‌های اول، سوم و پنجم متعلق به کتاب‌های ریاضی و ردیف‌های دوم و چهارم متعلق به کتاب‌های فیزیک است که تعداد حالت‌ها برابر $۲! \times ۳!$ خواهد بود. بنابراین تعداد حالت‌های مطلوب مسئله برابر است با:

$$۵! - ۳! \times ۲! = ۱۲۰ - ۱۲ = ۱۰۸$$

۵۰ کتاب ۴ ریاضی متمایز و ۳ کتاب ادبیات متمایز را به چند طریق می‌توان در کتابخانه کنار هم در یک طبقه قرار داد به طوری که کتاب‌های هم‌نوع کنار هم نباشند؟

(۴) $۷! \times ۲$

(۳) $(۳ \times ۴)!$

(۲) $۳! \times ۴! \times ۲$

(۱) $۳! \times ۴!$

پاسخ: گزینه ۱

R_1		R_2		R_3		R_4
-------	--	-------	--	-------	--	-------

اولاً مجبور هستیم اولین کتاب را ریاضی انتخاب کنیم تا کتاب‌های هم‌نوع کنار هم نباشند؛ که تعداد حالات آن‌ها $۴!$ می‌باشد.

ثانیاً در این وضعیت کتاب‌های ادبیات را به صورت

	A_1		A_2		A_3	
--	-------	--	-------	--	-------	--

 به تعداد $۳!$ حالت می‌توان در کتابخانه قرار داد. بنابراین تعداد حالات قرار دادن کل کتاب‌های فوق با شرط ذکر شده در کتابخانه، برابر است با $۳! \times ۴!$.

(۵۱) اگر $P(n+1, 2) = 72$ باشد، n کدام است؟

(۱) ۹

(۲) ۱۰

(۳) ۷

(۴) ۸

پاسخ: گزینه ۴

$$P(n+1, 2) = \frac{(n+1)!}{(n-1)!} = \frac{(n+1)(n)(n-1)!}{(n-1)!}$$

$$(n+1)(n) = 72 \Rightarrow n^2 + n - 72 = 0$$

$$\Rightarrow (n+9)(n-8) = 0 \Rightarrow n = -9 \text{ یا } n = 8$$

n نمی‌تواند منفی باشد، بنابراین:

$$n = 8$$

(۵۲) تعداد جایگشت‌های حروف کلمه "Hamrahan" به شرط آن که حروف یکسان کنار هم قرار بگیرند، کدام است؟

(۱) ۱۸۰

(۲) ۱۲۰

(۳) ۷۲۰

(۴) ۳۶۰

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا طبق شرط حروف را دسته‌بندی می‌کنیم.

Hh aaa r m n

مطابق دسته‌بندی ۵ شی داریم پس جایگشت آن ۵! است و چون حروف داخل دسته‌ها یکسان است، تفاوتی در جابه‌جایی نخواهیم داشت.

(۵۳) با ارقام صفر، ۱، ۲، ۵ و ۷ چند عدد ۵ رقمی زوج با ارقام متمایز می‌توان نوشت؟

(۱) ۲۴

(۲) ۴۲

(۳) ۳۶

(۴) ۶۳

پاسخ: گزینه ۲

$$\left. \begin{array}{l} \text{طبق اصل ضرب } 24 = \begin{array}{c} \underline{4} \ \underline{3} \ \underline{2} \ \underline{1} \quad \underline{1} \\ \uparrow \\ \text{یکان صفر باشد} \end{array} \\ \text{طبق اصل ضرب } 18 = \begin{array}{c} \underline{3} \ \underline{3} \ \underline{2} \ \underline{1} \quad \underline{1} \\ \uparrow \\ \text{یکان صفر نباشد (عدد ۲)} \end{array} \end{array} \right\} \text{طبق اصل جمع } 24 + 18 = 42$$

۵۴) چند جایگشت از حروف کلمه «مسابقه»، با حرف «م» آغاز می‌شود و حروف نقطه‌دار کنار هم قرار ندارند؟

(۱) ۷۲

(۲) ۳۶

(۳) ۹۶

(۴) ۴۸

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا حرف اول را «م» قرار می‌دهیم. ۵ حرف باقی مانده می‌توانند به ۵! کنار هم قرار گیرند. تعداد حالاتی که حروف نقطه‌دار («ب» و «ق») کنار هم قرار می‌گیرند برابر است با:

$$\begin{array}{c} \text{س} \quad \text{ا} \quad \text{ق} \quad \text{ب} \\ \text{یک بسته} \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} ۲! \\ \downarrow \\ \text{ق} \end{array} \times ۴! \quad \text{جایابی (ب) و (ق) درون بسته}$$

پس تعداد حالاتی که حروف نقطه‌دار کنار هم قرار ندارند برابر است با:

$$۵! - ۲! \times ۴! = ۴! \times ۳ = ۷۲$$

۵۵) با ارقام ۱ تا ۵ چند عدد چهار رقمی مضرب ۶ می‌توان ساخت؟ (بدون تکرار ارقام)

(۱) ۲۴

(۲) ۱۸

(۳) ۱۲

(۴) ۶

پاسخ: گزینه ۳

عددی که مضرب ۶ باشد، هم بر ۲ بخش‌پذیر است و هم بر ۳. یکان عددی که با ارقام ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ ساخته می‌شود باید ۲ یا ۴ باشد تا عدد بر ۲ بخش‌پذیر باشد.

بنابراین در این ۲ حالت بررسی می‌کنیم:

الف) یکان ۲ باشد: $\frac{\{۲\}}{\quad \quad \quad}$

برای اینکه عدد حاصل مضرب ۳ باشد، مجموع ارقام آن باید مضرب ۳ باشد، در این حالت فقط می‌توانیم ارقام $\{۱, ۴, ۵\}$ را انتخاب کنیم که این ارقام نیز به $۶ = ۳!$ حالت جایگشت می‌کنند.

ب) یکان ۴ باشد: $\frac{\{۴\}}{\quad \quad \quad}$

در این حالت نیز فقط ارقام $\{۱, ۲, ۵\}$ را می‌توانیم انتخاب کنیم که این ارقام نیز به $۶ = ۳!$ حالت جایگشت می‌کنند.

بنابراین در مجموع ۱۲ عدد مضرب ۶ می‌توانیم بسازیم.

۵۶) با حروف کلمه security چند کلمه ۸ حرفی (بدون توجه به معنی آن) می‌توان ساخت که s حرف اول آن نباشد؟

۸! (۴)

$\frac{8!}{7}$ (۳)

$7 \times 7!$ (۲)

$7!$ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

راه حل اول:

s	e	c	u	r	i	t	y
۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸

اگر s حرف اول کلمه نباشد، باید حرف دوم تا هشتم کلمه باشد که جمعاً ۷ حالت می‌شود و در هر یک از این حالت‌ها تعداد جایگشت‌های مابقی حروف (۷ حرف) برابر ۷! است. پس تعداد کل کلمات برابر می‌شود با:

$$7 \times 7!$$

راه حل دوم:

اگر از کل حالت‌ها، تعداد حالت‌هایی که حرف s اول است را کم کنیم، جواب به‌دست می‌آید:

$$8! - (1 \times 7!) = 8! - 7! = 8 \times 7! - 7! = 7! \times (8 - 1) = 7 \times 7!$$

۵۷) از بین تیم‌های حاضر در لیگ فوتبال یک کشور، ۳ تیم اول سهمیه حضور در رقابت‌های باشگاهی قاره خود را کسب می‌کنند. اگر تیم‌های اول تا سوم این لیگ به ۷۲۰ حالت مختلف بتواند مشخص شود، به چند طریق ممکن ۲ تیم آخر این لیگ مشخص می‌شود؟

۹۰ (۴)

۷۲ (۳)

$\frac{10!}{7!}$ (۲)

$\frac{6!}{2!}$ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

اگر تعداد تیم‌های این لیگ را n در نظر بگیریم، تعداد حالت‌های انتخاب سه تیم اول برابر با $P(n, 3)$ است، پس:

$$P(n, 3) = 720 \Rightarrow \frac{n!}{(n-3)!} = \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)!}{(n-3)!} = 720$$

$$\Rightarrow n(n-1)(n-2) = 10 \times 9 \times 8 \Rightarrow n = 10$$

تعداد حالت‌های انتخاب دو تیم آخر برابر است با:

$$P(10, 2) = \frac{10!}{(10-2)!} = \frac{10!}{8!} = \frac{10 \times 9 \times 8!}{8!} = 90$$

۵۸) اگر بخواهیم از یک گروه ۱۰ نفره، ۳ نفر استخدام کرده به‌طوری که نفر اول دبیر، نفر دوم نایب دبیر و نفر سوم منشی باشد، به چند روش این انتخاب ممکن است؟

۷۲ (۴)

۱۲۰ (۳)

۷۲۰ (۲)

۷۰۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

چون ترتیب داریم پس: $P(10, 3) = \frac{10!}{7!} = \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7!}{7!} = 720$

۵۹) در چند جایگشت از حروف کلمه «YASAMAN» حروف مشابه کنار هم دیگر قرار دارند ولی M و N کنار هم نیستند؟

۷۲ (۲)

۴۸ (۱)

۱۲۰ (۴)

۹۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

گزینه «۲»

اگر Aها را کنار هم و در یک بسته در نظر بگیریم:

AAA, Y, S, M, N

بین ۵ شیء باقی مانده به ۵! جایگشت دارند. Aها هم در بسته خودشان فقط یک جایگشت دارند. پس تعداد کلماتی که Aها کنار هم باشند برابر است با ۵!

در بین کلماتی که Aها کنار هم قرار دارند، اگر M و N هم کنار هم قرار گیرند، به صورت زیر M و N را هم درون بسته‌ای قرار می‌دهیم.

AAA MN YS

تعداد این کلمات برابر است با:

$$4! \times 2!$$

جا به جایی N, M

پس تعداد کلماتی که Aها کنار هم باشند و M و N کنار هم نباشند برابر است با:

$$5! - 4! \times 2! = 4!(5 - 2) = 4! \times 3 = 72$$

۶۰) ۳ پسر و ۴ دختر به چند طریق می‌توانند در یک ردیف قرار گیرند، به طوری که فقط پسرهای یک درمیان نسبت به هم باشند؟

۲۱۸ (۴)

۲۸۸ (۳)

۱۴۴ (۲)

۲۸۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

چون فقط پسرهای یک درمیان نسبت به هم قرار می‌گیرند، پس ۲ حالت به صورت ggbgbggb و bgbgbgg خواهیم داشت. در هریک از این حالات پسرهای ۳! طریق و دخترها به ۴! طریق قرار می‌گیرند، لذا جواب نهایی برابر با $2 \times 4! \times 3! = 288$ می‌باشد.